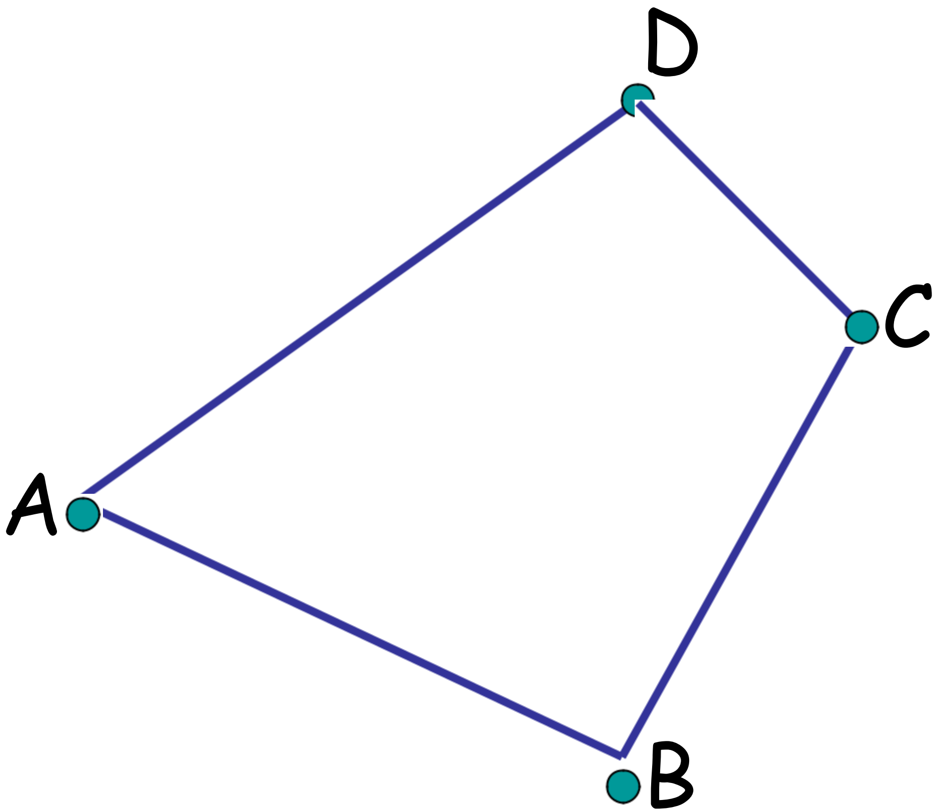
Четвороугао

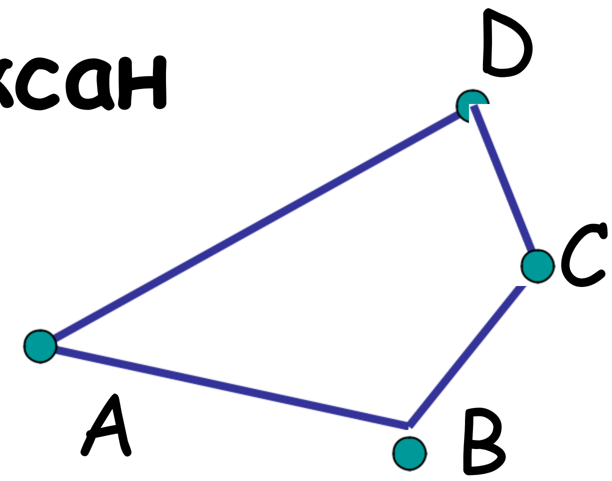
Појам и врсте

Многоугао који има четири странице назива се **четвороугао**.

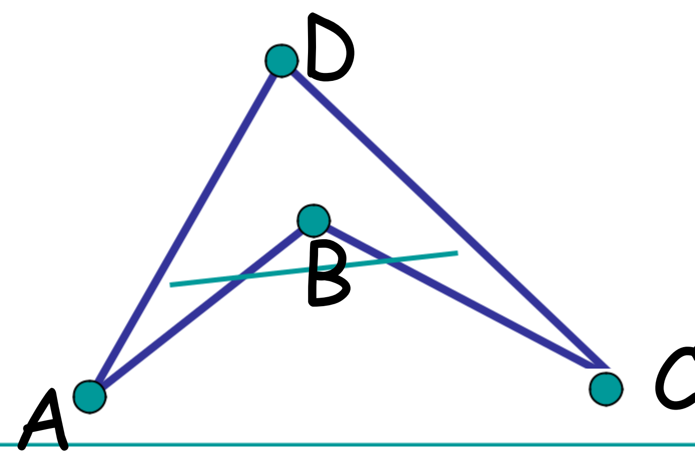


Четвороугао може бити конвексан и неконвексан.

Четвороугао је **конвексан** ако садржи сваку дуж чије крајње тачке припадају том четвороуглу.



У супротном четвороугао је **неконвексан**.

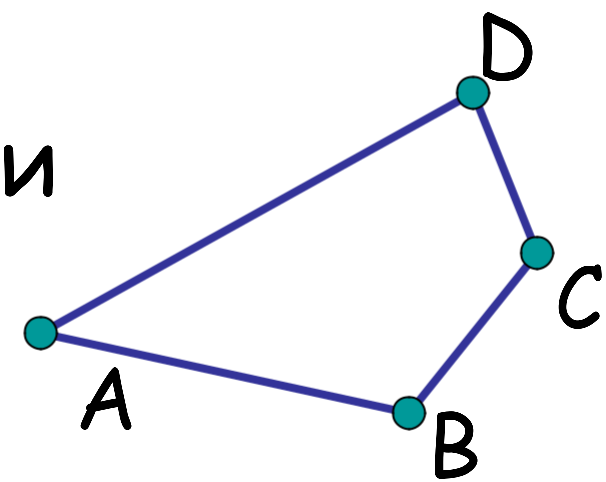


Проучаваћемо само конвексне четвороуглове.

Основни елементи четвороугла су:

- темена
- странице
- унутрашњи углови

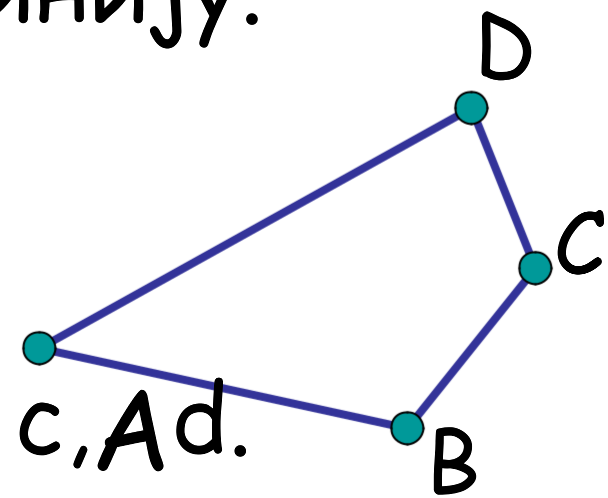
четвороугла.



Странице четвороугла су дужи које чине четвороугаону линију.

Обележавају се са

AB, BC, CD, DA



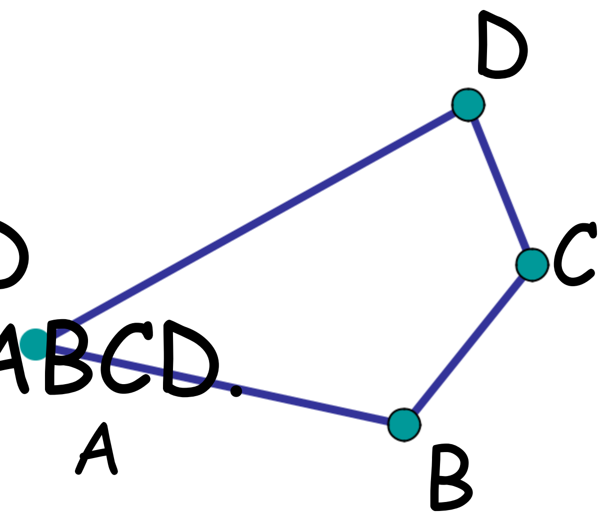
или са a, b, c, A d.

Странице које имају заједничко теме називају се **суседне** (нпр. AB и BC), а оне које немају заједничко теме су **наспрамне** или **несуседне** (AB и CD).

Темена четвороугла су крајње тачке страница четвороугла.

Најчешће се обележавају словима A,B,CиD.

Четвороугао чија су темена A,B,C и D обележава се са ABCD.

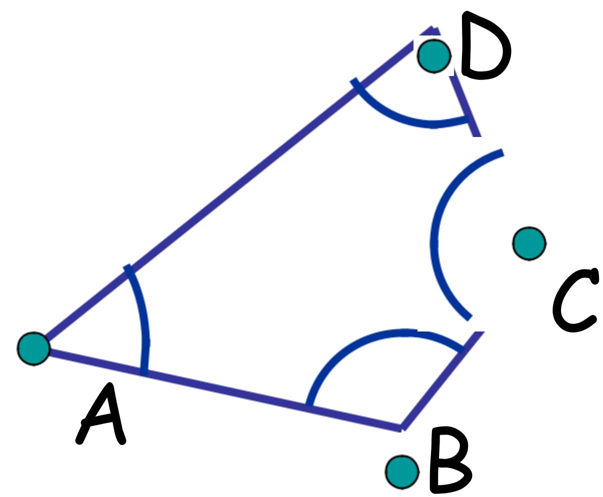


Унутрашњи углови четвороугла су углови:

$\measuredangle DAB$, $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$ и $\measuredangle CDA$.

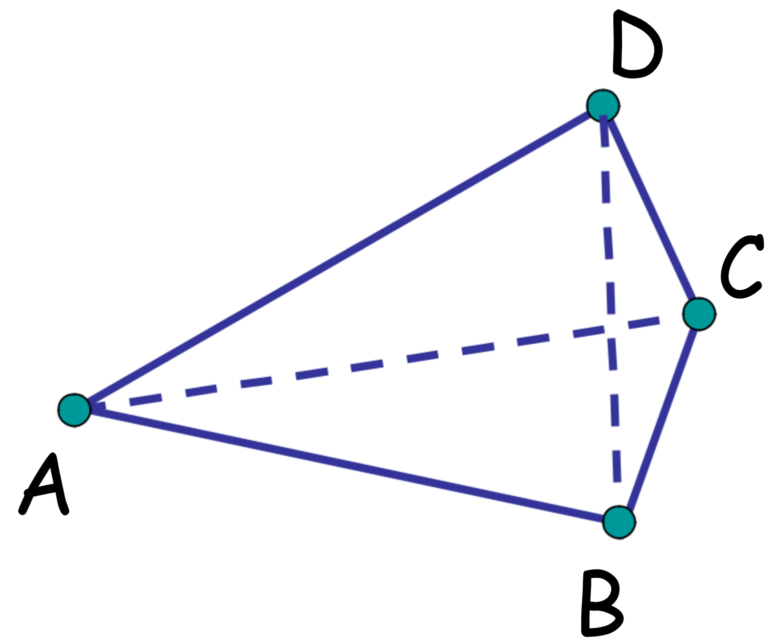
Често се углови четвороугла обележавају и словима грчког алфабета:

α, β, γ и δ.



Дужи чије су крајње тачке несуседна темена четвороугла називају се **дијагонале** тог четвороугла.

Дакле, дијагонале четвороугла ABCD су AC и BD.

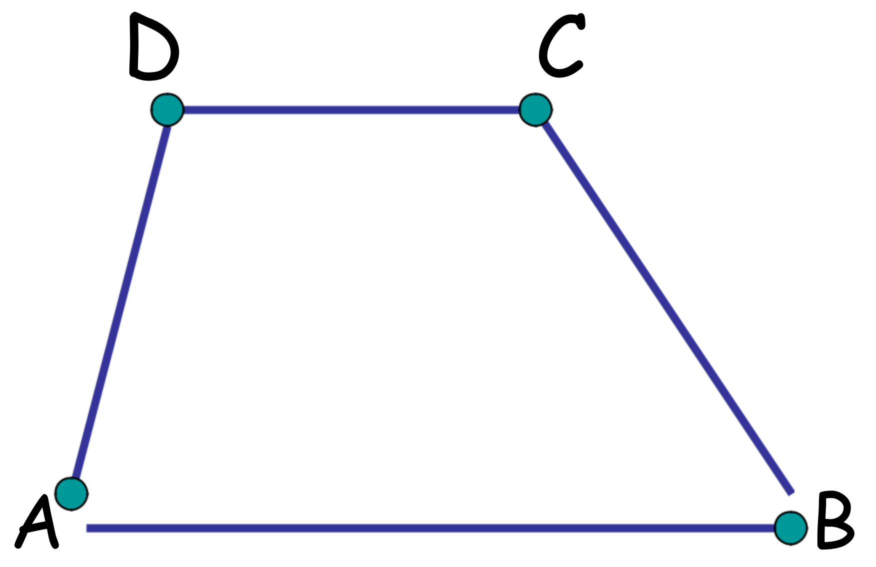


Врсте четвороуглa

* трапез
* паралелограм
* делтоид

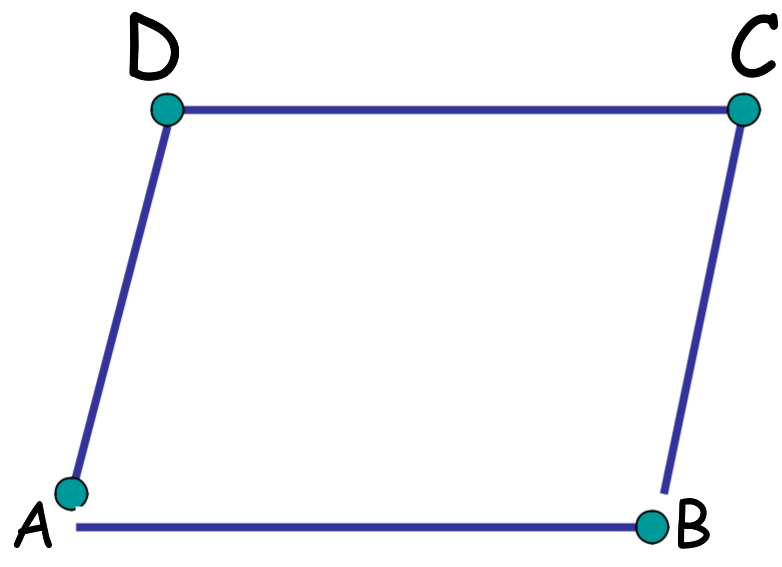
Трапез

Трапез је четвороугао који има један пар паралелних страница.



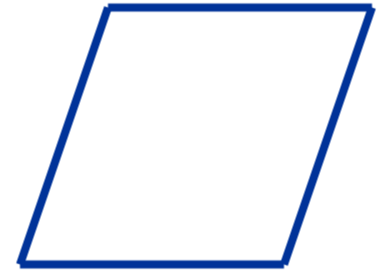
Паралелограм

Паралелограм је четвороугао који има два пара паралелних страница.

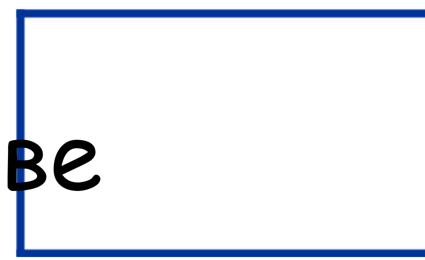


Врсте паралелограма

Паралелограм чије су
све странице једнаке
називa се **ромб**.

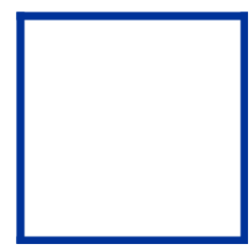


Паралелограм који има
све праве углове



назива се **правоугаоник**.

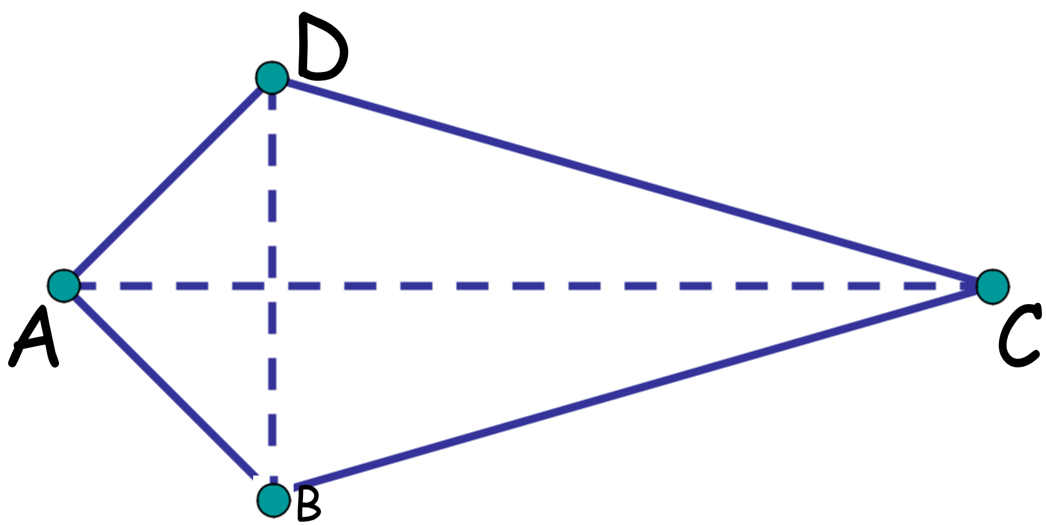
Правоугаоник чије су



све странице једнаке

Делтоид

Четвороугао који има два пара једнаких суседних страница назива се **делтоид**.



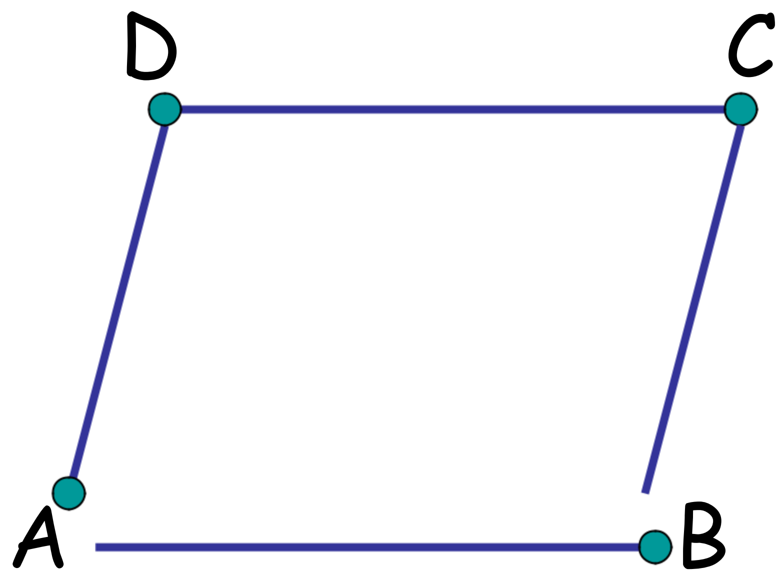
Поновимо:

* Шта је четвороугао?
* Када је четвороугао конвексан?
* Који су елементи четвороугла?
* Шта су дијагонале четвороугла?
* Које врсте четвороугла постоје?
* Шта је трапез?
* Шта је паралелограм?
* Које паралелограме знаш?
* Шта је делтоид?

Паралелограм

Општа својства

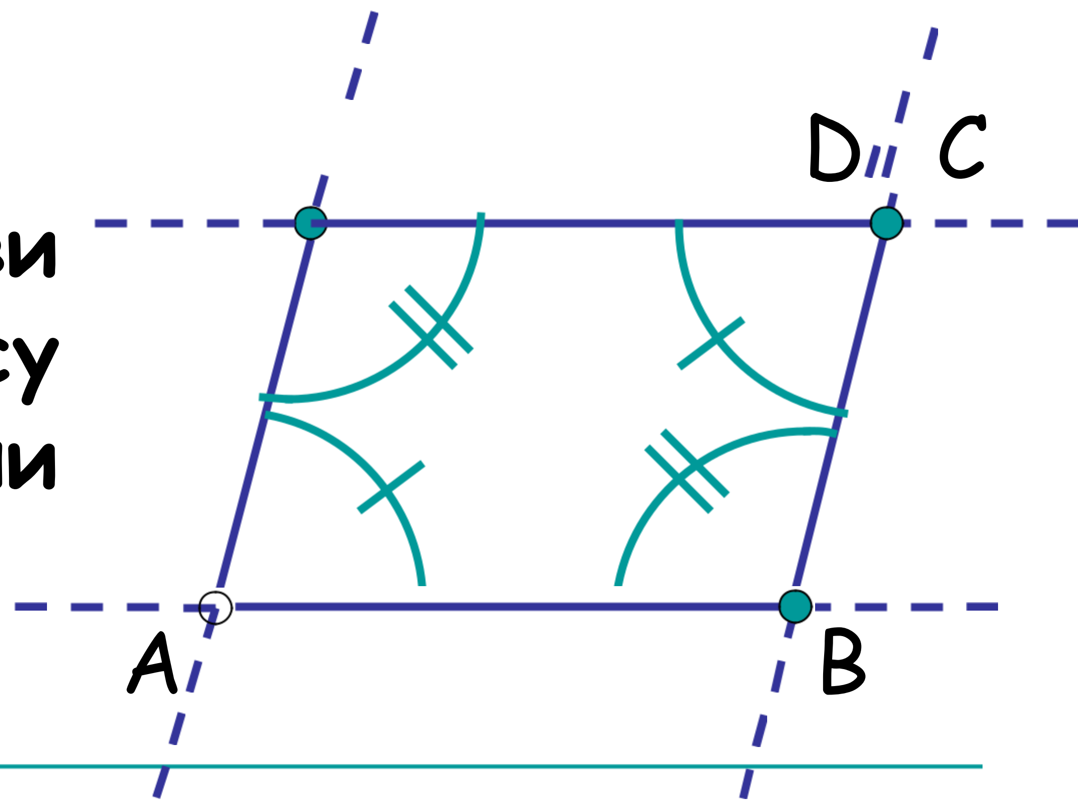
Паралелограм је четвороугао који има два пара паралелних страница.



$AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$, па су углови углови α, β, γ и δ са паралелним крацима, дакле или једнаки или суплементни.

Закључујемо:

Наспрамни углови паралелограма су једнаки, а суседни су суплементни.



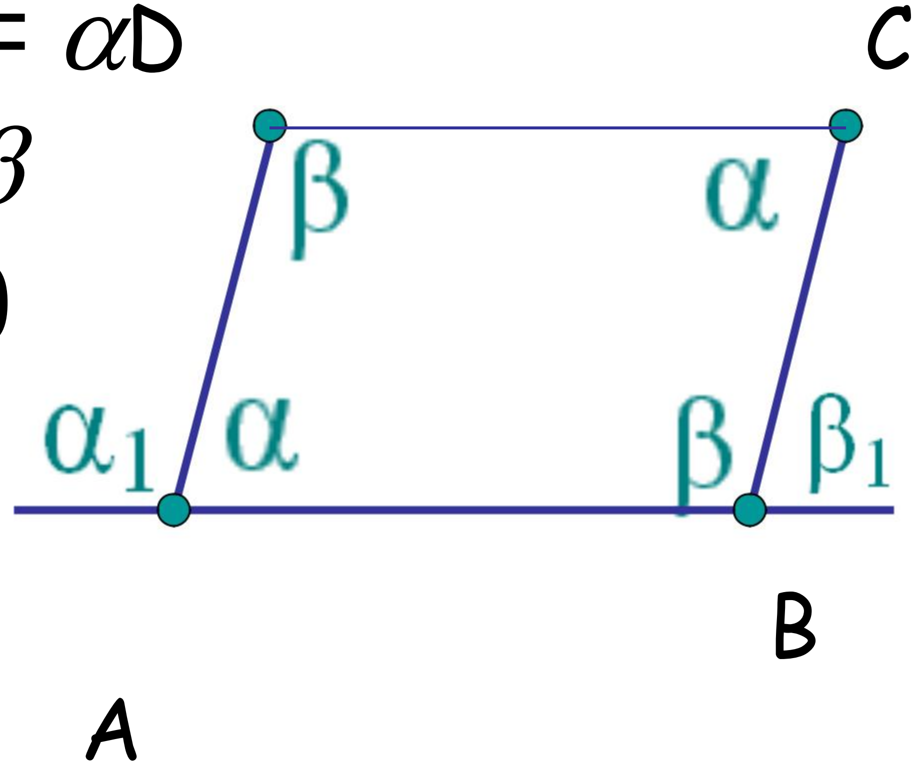
Важи:$ÐA = ÐC = \alpha$D

$ÐB = ÐD = \beta$

$\alpha + \beta = 180$

$\alpha_1 = \beta$

$\alpha = \beta_1$



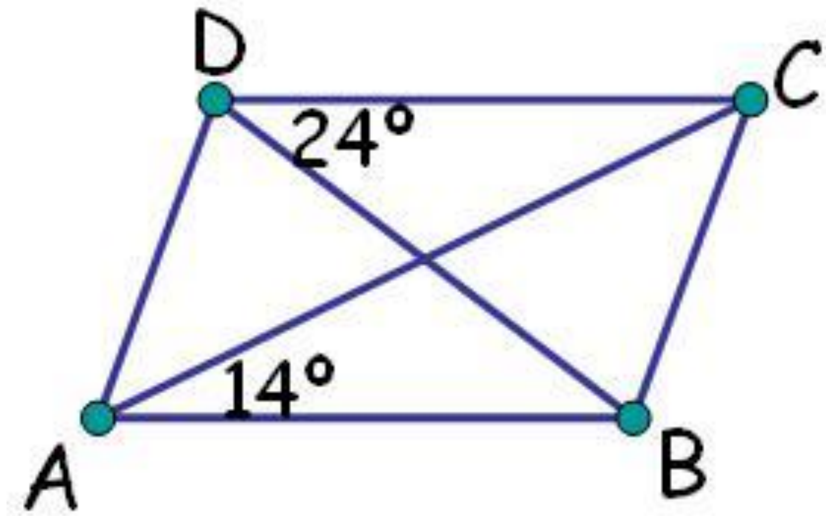
<u>Важи и обрнуто</u>:

Четвороугао чији су наспрамни углови једнаки или пак суседни углови суплементни је паралелограм.

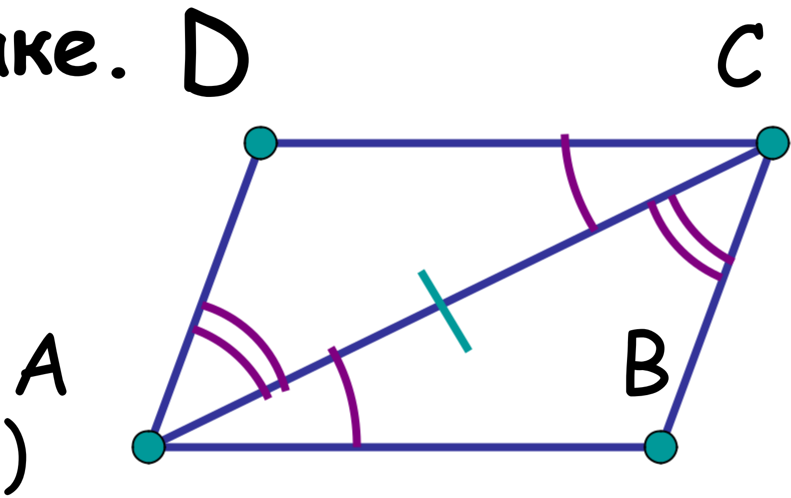
Пример 1: Одреди све углове паралелограма ако је један његов угао $54°$.

Пример 2: Одреди све углове паралелограма ако је један његов спољашњи угао $120°$.

Пример 3: Под којим углом се секу дијагонале паралелограма ABCD са слике?



Теорема 1: **Наспрамне странице паралелограма су једнаке.**



Доказ: Посматрајмо троуглове ΔABC и ΔACD

AC=AC (заједничка страница)

ÐBAC = ÐACD(углови са парал. крацима)

ÐACB = ÐCAD (углови са парал. крацима)

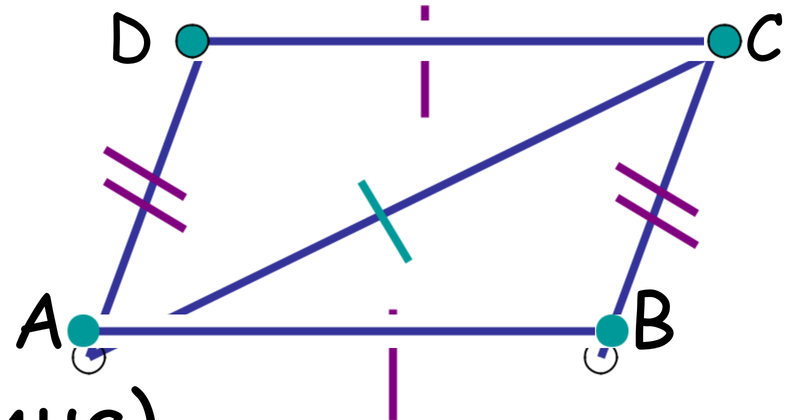
$\overline{УСУ}$

Þ $\Delta ABC \cong \Delta ACD$ Þ í

ì$AB = CD$

î$BC = AD$

Теорема 2: **Четвороугао чије су наспрамне странице једнаке је паралелограм.**



Доказ: Посматрајмо троуглове ΔABC и ΔACD

AC=AC (заједничка страница)

AB=CD (услов теореме)

BC=AD (услов теореме)

CCC

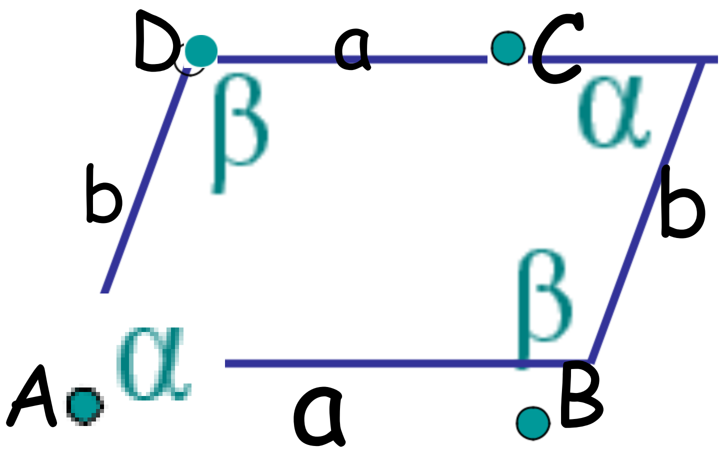
$\Rightarrow$

$\Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \begin{cases} \angle BAC = \angle ACD \Rightarrow AB \parallel CD \\ \angle ACB = \angle CAD \Rightarrow BC \parallel AD \end{cases}$

Дакле, паралелограм има:

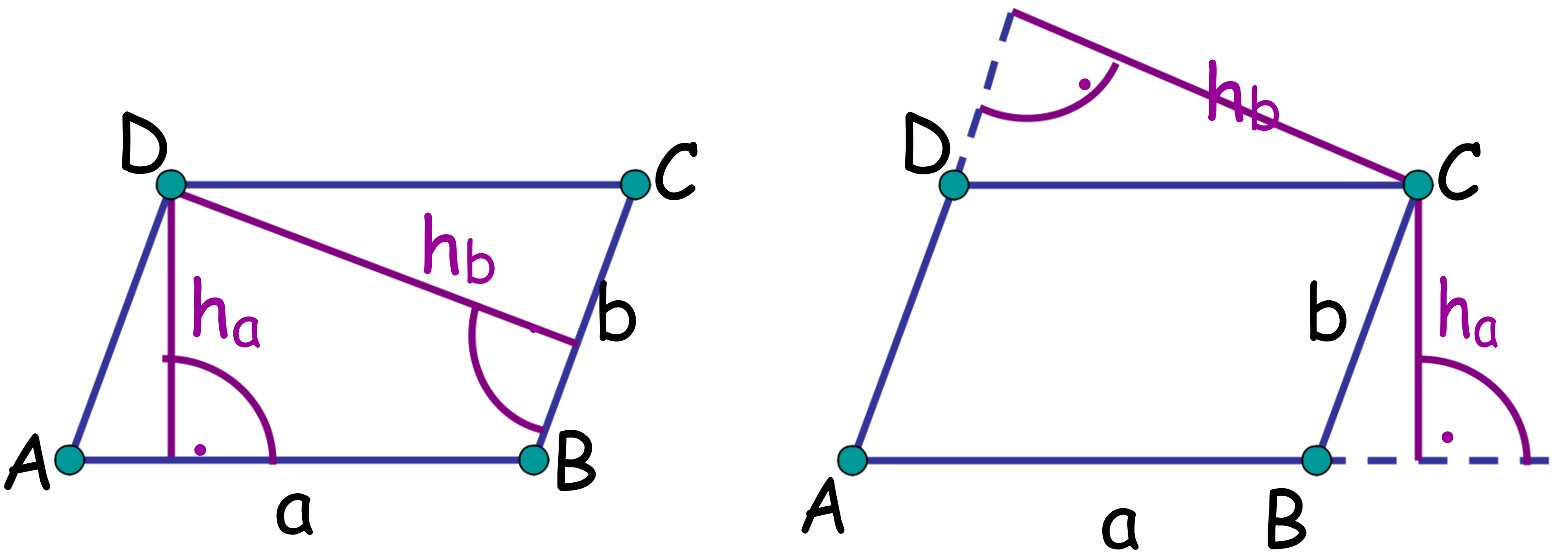
два пара једнаких страница, и

два пара једнаких углова!

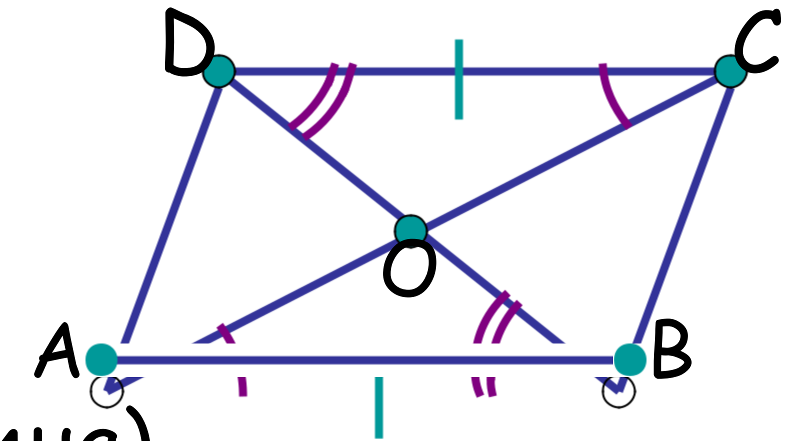


Обим паралелограма израчунава се по формули: О=$\boxed{2a+2b}$

Дуж чији је један крај теме паралелограма, а други подножје нормале на наспрамну страницу или праву којој припада наспрамна страница назива се **висина паралелограма** (h).



Теорема 3: **Дијагонале паралелограма се полове.**



Доказ: Посматрајмо троуглове ΔABO и ΔCDO

AB=CD (наспрамне страница)

ÐA = ÐC (углови са парал. крацима)

ÐB = ÐD (углови са парал. крацима)

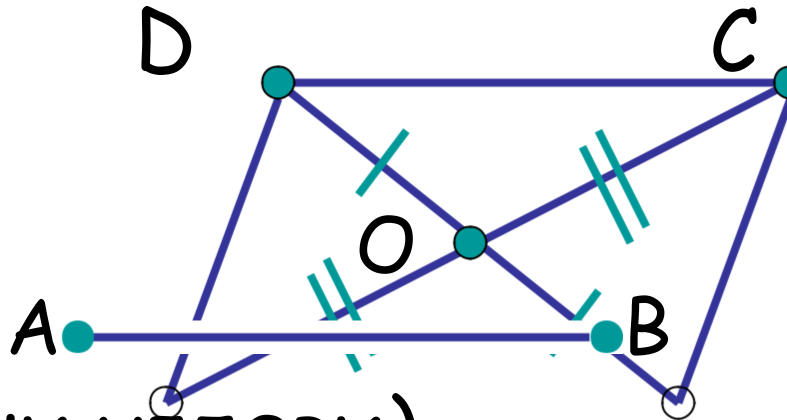
$\overline{УСУ}$

Þ $\Delta ABO \cong \Delta CDO$ Þ í

ì$AO = CO$

î$BO = DO$

Теорема 4: Четвороугао чије се дијагонале полове је паралелограм.



Доказ: Посматрајмо троуглове ΔABO и ΔCDO

Đ$AOB = $ ĐCOD (унакрсни углови)

$AO = OC$ (половине дијагонала)

$BO = OD$ (половине дијагонала)

$СУС$

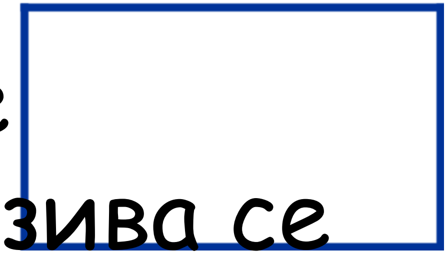
Þ$\Delta ABO \cong \Delta CDO$ Þ $AB = CD$

На исти начин је BC=AD.

Правоугаоник, ромб и квадрат

Обрада

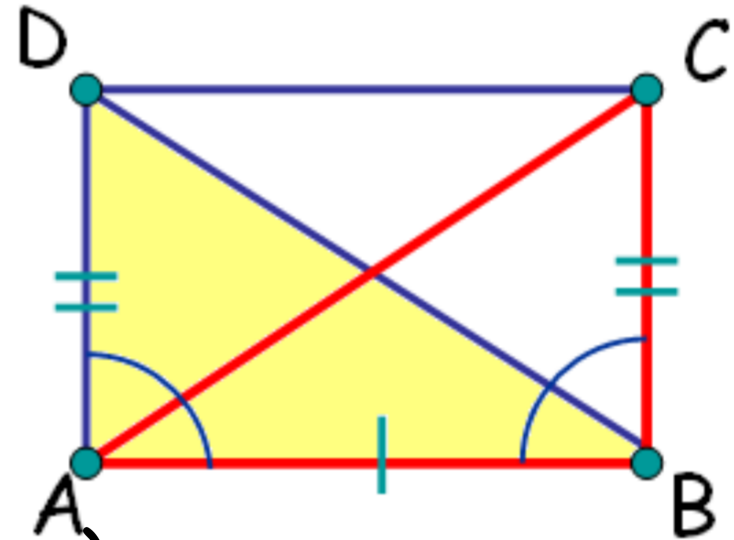
Паралелограм који има све праве углове назива се **правоугаоник**.



Својства правоугаоника:

* сви унутрашњи углови су по 90°;
* наспрамне странице су једнаке;
* дијагонале се полове.

Теорема 1: **Правоугаоник има једнаке дијагонале.**



Доказ: Посматрајмо троуглове ΔABD и ΔABC

AB=AB (заједничка страница)

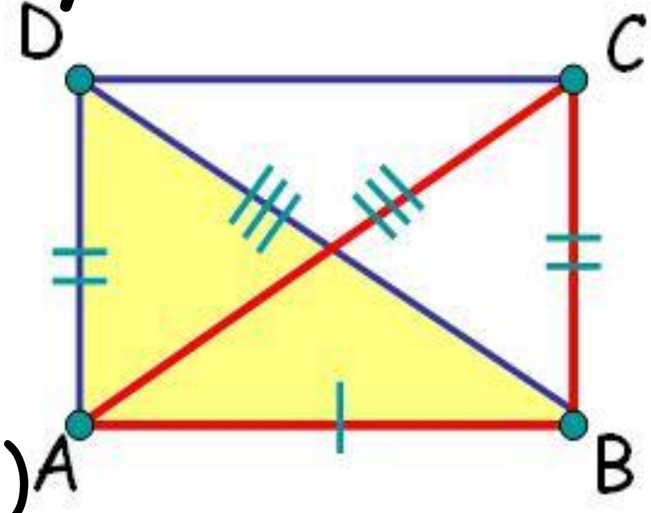
AD=BC (наспрамне странице)

ÐA = ÐB (=90°)

CYC

Þ$\Delta ABD \cong \Delta ABC$ Þ $AC = BD$

Теорема 2: **Паралелограм чије су дијагонале једнаке је правоугаоник.**



Доказ: Посматрајмо троуглове ΔABD и ΔABC

AB=AB (заједничка страница)

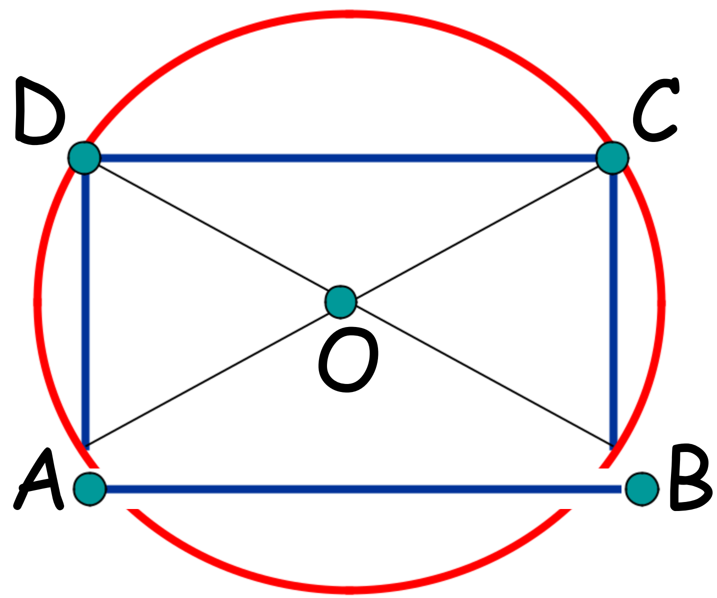
AD=BC (наспрамне странице)

BD=AC (услов теореме)

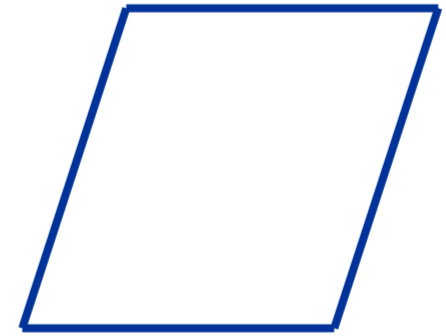
CCC

Þ$\Delta ABD \cong \Delta ABC$Þ Ð$A$= Ð$B$ =90

Како је OA=OB=OC=OD, око правоугаоника се може описати кружница k(O,r), где је $r = \frac{d}{2}$.



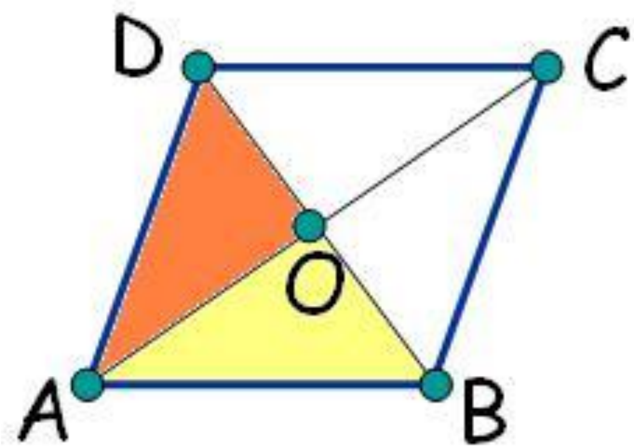
Паралелограм чије су све странице једнаке назива се **ромб**.



Својства ромба:

* све странице су једнаке;
* наспрамни углови су једнаки;
* висине су једнаке;
* дијагонале се полове.

Теорема 3: **Дијагонале ромба полове његове углове и нормалне су једна на другу.**



Доказ: Посматрајмо троуглове ΔABO и ΔADO

AB=AD (странице ромба)

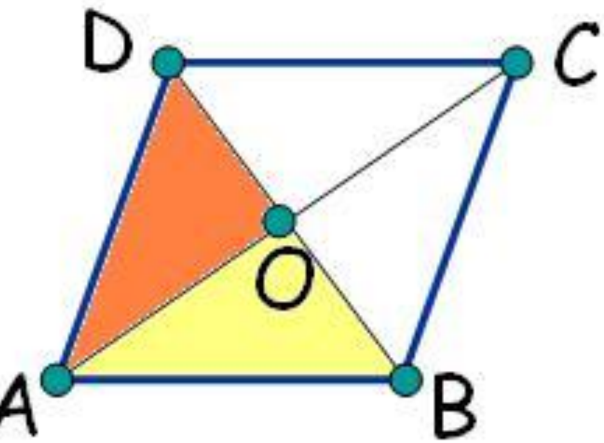
AO=AO (заједничка страница)

BO=DO (половине дијагонале)

$\overline{CCC}$ ÞĐO=90 ,

Þ$\Delta ABO \cong \Delta ADO$ ĐBAO = ĐOAD

Теорема 4: **Четвороугао чије се дијагонале полове и нормалне су једна на другу је ромб.**



Доказ: Посматрајмо троуглове ΔABO и ΔADO

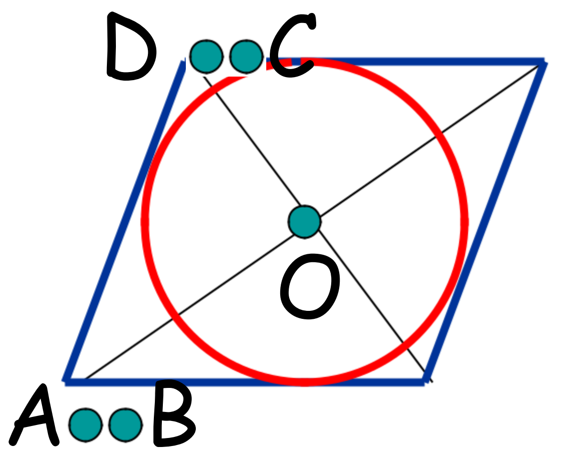
AO=AO (заједничка страница)
BO=DO (половине дијагонале)

$$\angle AOB = \angle AOD = 90$$

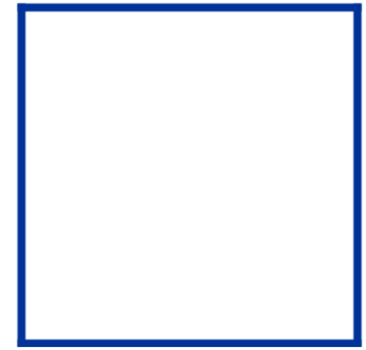
$\overline{}$
CYC

$$\Rightarrow \Delta ABO \cong \Delta ADO \Rightarrow AB = AD$$

Како је тачка O у пресеку симетрала углова ромба, у ромб се може уписати кружница k(O,r), где је $r = \frac{h}{2}$.



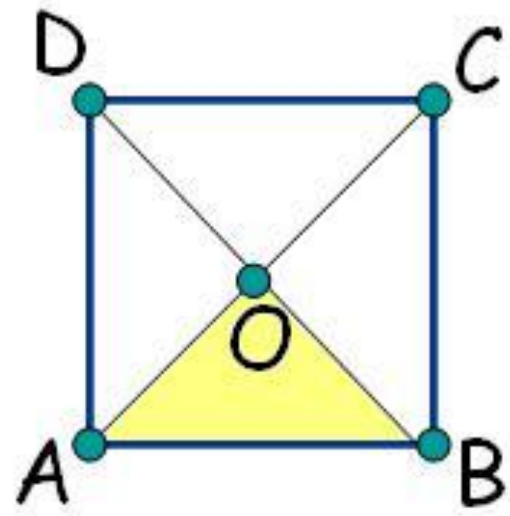
Правоугаоник чије су све странице једнаке назива се **квадрат**.



Својства квадрата:

* сви унутрашњи углови су по 90°;
* све странице су једнаке;
* дијагонале се полове.

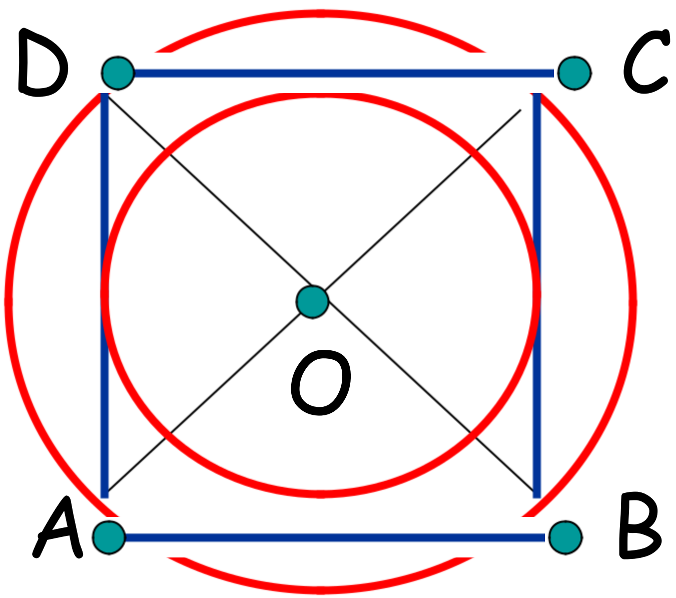
Теорема 5: **Ромб чије су дијагонале једнаке је квадрат.**



Доказ: Ако је AO=BO, то значи да је ΔABO једнакокрако правоугли, па је Đ$OAB = 45$, одакле је Đ$BAD = 90$.

Квадрат је правоугаоник, па се око њега може **описати кружница**.

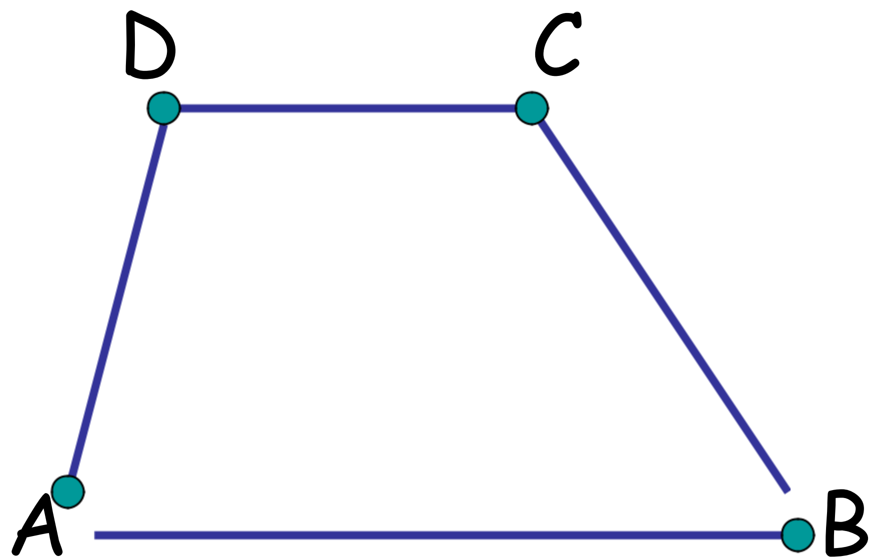
Квадрат је ромб па се у њега може и **уписати кружница**.



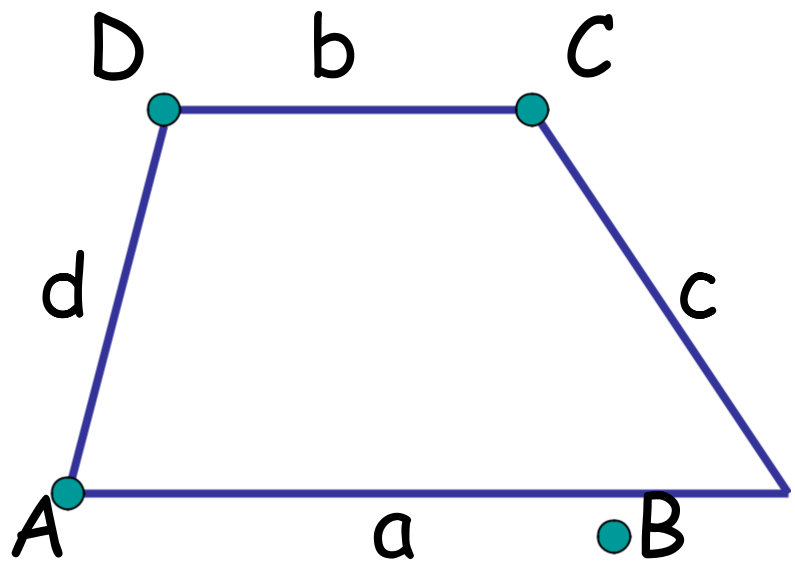
Трапез

Обрада

Трапез је четвороугао који има један пар паралелних страница.

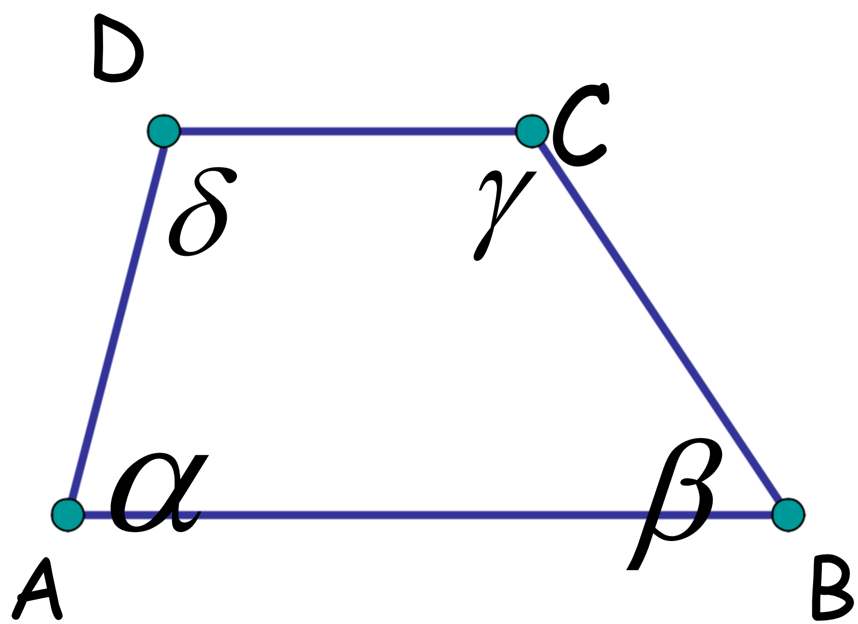


Паралелне странице трапеза називају се **основице** трапеза, а непаралелне странице трапеза су **краци** трапеза.



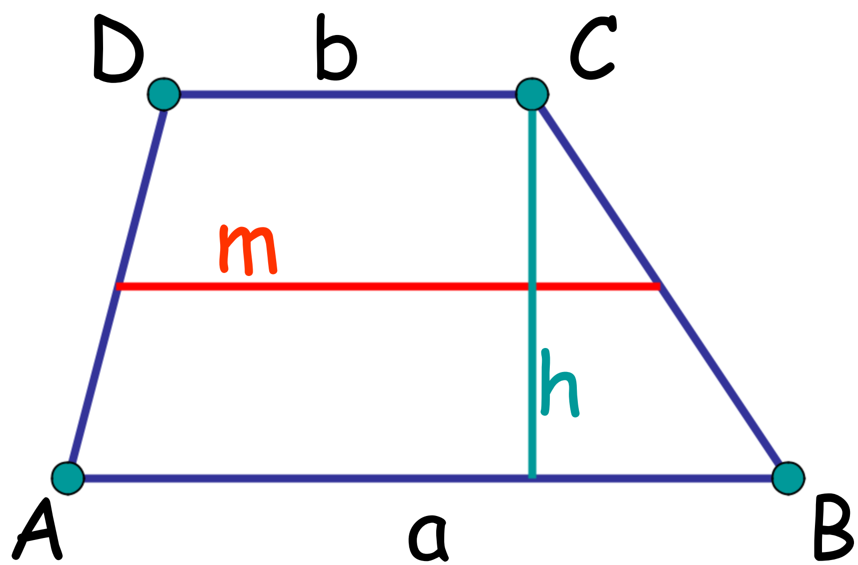
Углови на истом краку трапеза су суплементни.

$$\alpha + \delta = 180 \qquad \beta + \gamma = 180$$



Дуж која је нормална на основице назива се **висина трапеза** и обележава се са h.

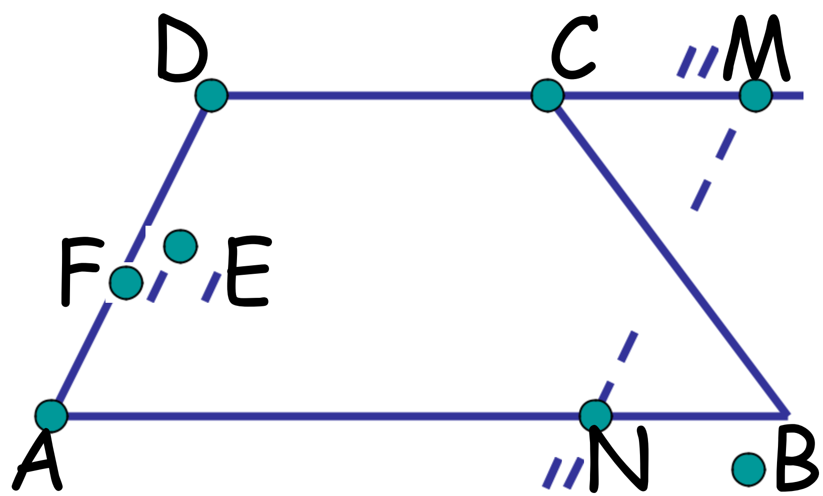
Дуж која спаја средине кракова назива се **средња линија** и обележава се словом m.



Теорема 1: **Средња линија трапеза је паралелна основицама трапеза и једнака је њиховом полузбиру.**

Доказ: Нека су AB и CD основице трапеза и нека су E и F средишта кракова BC и AD.

Нека права која садржи тачку E и паралелна је са AD сече праве AB и CD редом у тачкама M и N.

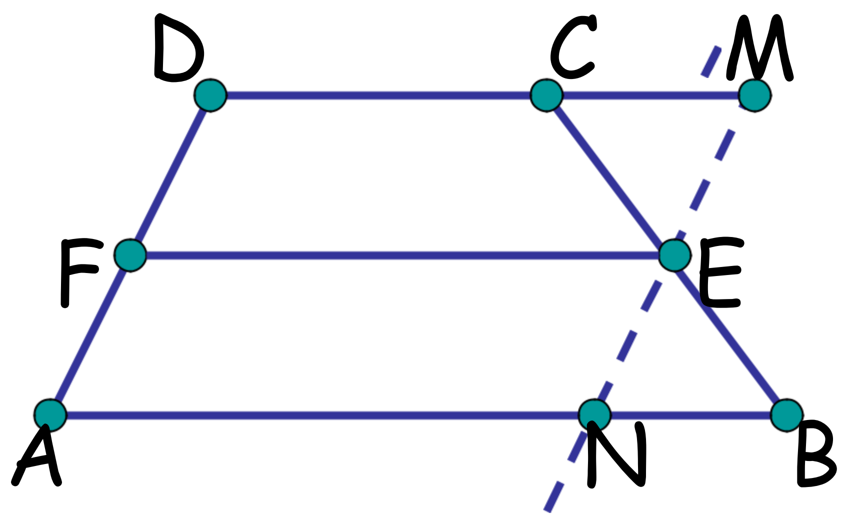


Троуглови BNE и CME су подударни (BE=CE,$ÐB = ÐC$, $ÐE = ÐE$).

Четвороуглови ANMD и AMFE су паралелограми, па je AN=FE=DM.

Важи:

2FE =AN+DM



Þ $m = \frac{a+b}{2}$

=AN+DC+CM

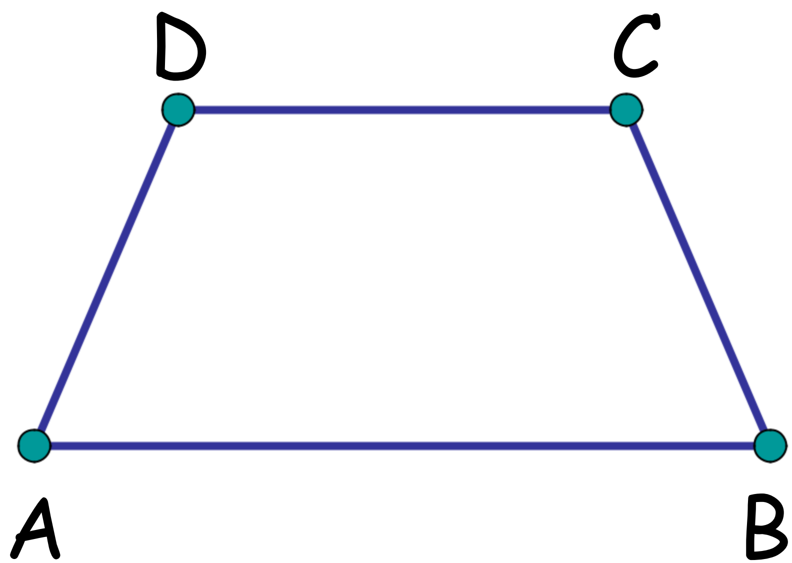
Врсте трапеза

Једнакокраки трапез

Правоугли трапез

Једнакокраки трапез

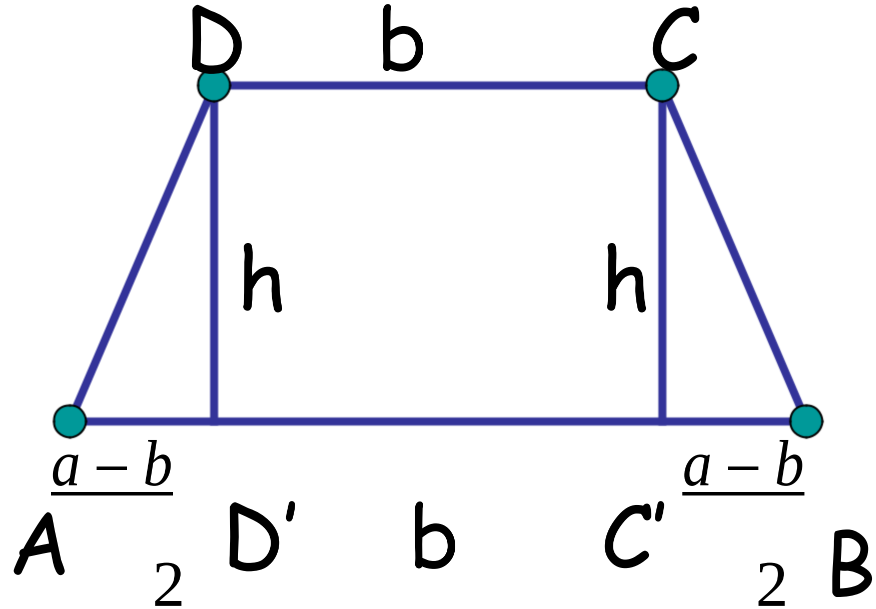
Трапез чији су краци једнаки назива се **једнакокраки трапез**.



Висине повучене из темена C и D деле основицу AB на три дела.

Притом је AD'=C'B и D'C'=b, па добијамо:

$$AD' = \frac{a-b}{2}$$



Теорема 2: **Једнакокраки трапез има једнаке углове на основици.**

Доказ: Конструисаћемо праву p која пролази кроз тачку C и паралелна је са AD. Она сече праву AB у тачки E.

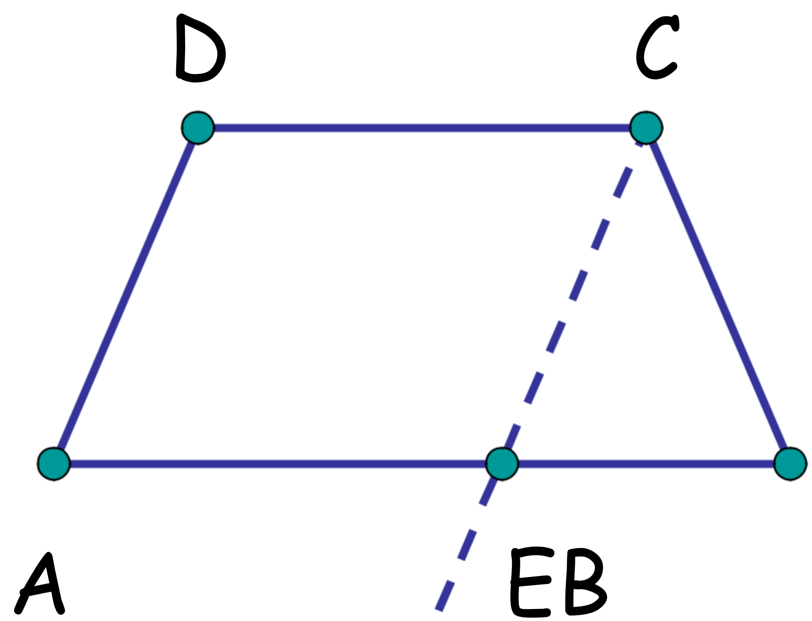
Þ AECD је паралелограм,

Þ EBC је једнакокраки троугао

Þ ÐE=ÐB

ÐE=ÐA

одакле је ÐA = ÐB



Теорема 3: **Једнакокраки трапез има једнаке дијагонале.**

Доказ: Посматрајмо троуглове ΔABD и ΔABC .

AB=AB (заједничка страница)

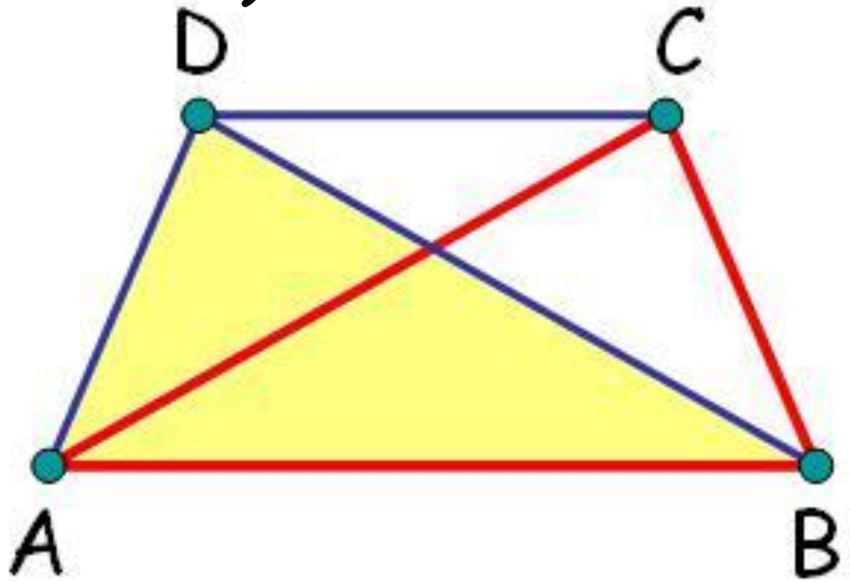
AD=BC (краци)

$\angle A = \angle B$ (углови на основици)

CYC

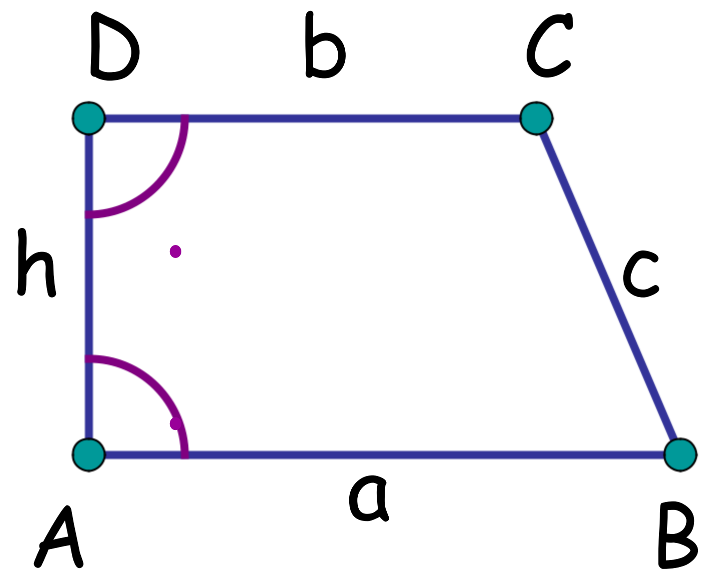
$\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta ABC$

$\Rightarrow AC=BD$



Правоугли трапез

Трапез чији је један крак нормалан на основице назива се **правоугли трапез**.



Висина повучена из темена C дели основицу AB на два дела.

Притом је AC'=b, па добијамо:

$$C'D = a - b$$